

Quando gli esempi numerici non bastano: approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico in un'esperienza di tirocinio

Andres Manzini, Annalisa Cusi

I.T.C.G. Einaudi Correggio (RE), Università di Torino

VII Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della
Matematica

Il percorso didattico

- Attività realizzata nell'ambito del Tirocinio Formativo Attivo svolto presso UniMoRe (corso di *Elementi di Algebra e Geometria e aspetti teorico-didattici della dimostrazione nell'insegnamento della Matematica*)
- Percorso di introduzione alla costruzione di dimostrazioni in ambito aritmetico proposto in una classe prima Liceo Classico
- Durata dell'intervento: 4 ore in classe
- Periodo di svolgimento: Aprile 2015
- Strategie didattiche: lavoro a gruppi e discussione matematica

Progettazione

Prerequisiti

Modulo relativo al calcolo algebrico di base. Competenze base nella semplificazione di espressioni algebriche.

Obiettivi

Sperimentare un approccio didattico che promuova un apprendimento significativo dell'algebra, mirato a far cogliere agli studenti come il linguaggio simbolico possa rappresentare uno strumento potente per comunicare, interpretare, ragionare (Symbol Sense - Arcavi 1994,2005).

Il ruolo dell'insegnante

M-CAce

Modello di Comportamenti e Atteggiamenti Consapevoli ed Efficaci
(Costrutto MCAce) (Cusi & Malara 2009, Cusi 2012)

- Soggetto che indaga
 - Autentico partecipante
 - Guida operativa - strategica
 - Attivatore di processi interpretativi
 - Attivatore di pensieri anticipatori
- Guida al controllo dei significati, sia sul piano sintattico che semantico
 - Guida riflessiva nell'individuazione di modelli operativi - strategici efficaci
 - Attivatore di atteggiamenti riflessivi
 - Attivatore di atti metacognitivi

Attività svolte

- Lezione introduttiva: raccordo con le attività di classe (esercizi sulle scomposizioni, lettura critica delle espressioni algebriche, presentazione del percorso didattico)
- Traduzione di enunciati da linguaggio verbale a linguaggio algebrico e viceversa
- Analisi critica di enunciati riguardanti proprietà dei numeri naturali
- Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e costruzione delle relative dimostrazioni

Discussione di classe per la condivisione e il confronto in tutte le tappe del percorso

Traduzione / Analisi critica di enunciati

Traduci i seguenti enunciati in linguaggio algebrico:

- [1] Il successivo di un numero
- [2] Un numero dispari
- [3] Un numero di due cifre
- [4] Un multiplo di 5

Traduci le seguenti procedure in linguaggio algebrico:

- [1] Aggiungi 5 al successivo del quadrato di un multiplo di 5.
- [2] Togli da un numero dispari il dispari che lo precede.

Traduci in linguaggio algebrico i seguenti enunciati, che esprimono l'uguaglianza tra due espressioni. Verifica successivamente se l'uguaglianza espressa è corretta. In caso non lo sia, trova l'errore.

- [1] La differenza tra il quadrato di un numero ed il numero stesso è uguale al prodotto del numero per il suo precedente.
- [2] Sommando 3 al doppio del precedente di un numero si ottiene il successivo pari di un numero pari.

Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e costruzione delle relative dimostrazioni

- Numero di studenti per gruppo: 2
- Tempo per l'attività: 2 ore
- Modalità di rilevamento: raccolta dei protocolli scritti prodotti dagli allievi, Audio-registrazione delle attività svolte dalle coppie di allievi, Audio-registrazione della discussione collettiva condotta al termine del lavoro a coppie

Dimostrazione proposta

Considera un numero naturale. Determina la differenza tra il suo quadrato e quello del suo precedente. Che regolarità osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi?

Approccio al problema

Esplorazione Numerica: $5^2 - 4^2 = 9$; $4^2 - 3^2 = 7$; $3^2 - 2^2 = 5 \dots$

Congetture attese: la differenza tra il quadrato di un numero e il suo precedente è

- un numero dispari
- il precedente del doppio del numero considerato
- la somma tra i due numeri iniziali

Proposta di dimostrazione: considerato un qualunque numero naturale n , si indicherà il suo precedente con $n - 1$. allora

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1 = n + (n - 1)$$

Focus dell'insegnante:

- Corretta attivazione di processi interpretativi e dei frames concettuali precedente - successivo, pari - dispari
- Corrette trasformazioni sintattiche e corretta gestione delle trasformazioni sintattiche guidata dall'attivazione di efficaci pensieri

Analisi del protocollo di un gruppo

①

$$n^2 - (n-1)^2 = (n - (n-1))(n + (n-1)) = \cancel{n-1}(2n-1) = \cancel{n-1} + 2$$
$$5^2 - (5-1)^2 = 25 - 16 = 9$$
$$3^2 - (3-1)^2 = 9 - 4 = 5$$
$$7^2 - (7-1)^2 = 49 - 36 = 13$$
$$4^2 - (4-1)^2 = 16 - 9 = 7$$
$$2^2 - (2-1)^2 = 4 - 1 = 3$$
$$6^2 - (6-1)^2 = 36 - 25 = 11$$

la regolarità è che il risultato è sempre un numero
Dimostrazione con i numeri

②

$$-1((2 \cdot 5) - 1) = -9$$

B1: Hai letto bene il testo?...Secondo me ci conviene partire come abbiamo fatto l'altra volta, cioè senza i numeri...cioè con n ...allora scrivo n^2 meno il suo precedente, cioè $(n-1)^2$...in teoria questa è una differenza di quadrati...

B2: Sì, allora sarebbe $(n - (n-1))(n + (n-1))$...questo dovremmo risolvere e questi qua è come se non fossero...viene quindi $-1(2n-1)$

Analisi del protocollo di un gruppo

$$n^2 - (n-1)^2 = (n - (n-1))(n + (n-1)) = \cancel{(1)}(2n-1) = \cancel{2n-1}$$

$$5^2 - (5-1)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$3^2 - (3-1)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$7^2 - (7-1)^2 = 49 - 36 = 13$$

$$4^2 - (4-1)^2 = 16 - 9 = 7$$

$$2^2 - (2-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

$$6^2 - (6-1)^2 = 36 - 25 = 11$$

B1: Che regolarità c'è? Boh, io non lo vedo proprio con i numeri...

B1: 5 e 4...3 e 2...7 e 6..

B2: la regolarità è che c'è sempre un pari meno un dispari... Ah ma perchè abbiamo sempre preso un numero dispari all'inizio... proviamo con 4 e 3...

B1: Vedi che sono tutti dispari. B2: E vanno sempre avanti di due!

La regola è che il risultato è sempre il doppio del numero meno 1, cioè sempre un numero dispari.

Dimostrazione con i numeri

Analisi del protocollo di un gruppo

①

$$n^2 - (n-1)^2 = (n - (n-1))(n + (n-1)) = \cancel{n-1}(2n-1) = \cancel{n-1} + 2$$
$$5^2 - (5-1)^2 = 25 - 16 = 9$$
$$3^2 - (3-1)^2 = 9 - 4 = 5$$
$$7^2 - (7-1)^2 = 49 - 36 = 13$$
$$4^2 - (4-1)^2 = 16 - 9 = 7$$
$$2^2 - (2-1)^2 = 4 - 1 = 3$$
$$6^2 - (6-1)^2 = 36 - 25 = 11$$

$$= \cancel{n-1}(2n-1) =$$

$$-1((2 \cdot 3) - 1) = -5$$

ⓑ

B1: Però se faccio $(-1)(2 \cdot 3 - 1) = -5$... è che non va bene il -1 ... ah ma ecco ho capito: ci siamo sbagliati, perché se c'è il meno davanti alla parentesi

B2: ah già è vero, allora viene $2n - 1$. Allora viene sempre il doppio del numero meno uno, quindi sempre un numero dispari.

La regolarità è che il risultato è sempre il doppio del numero meno 1, cioè sempre un numero dispari

Dimostrazione con i numeri

Analisi del protocollo di un gruppo

In evidenza

- gli alunni sono consapevoli che il ricorso ad esempi numerici non sia sufficiente per dimostrare la congettura proposta
- uso della scomposizione "differenza di quadrati" che appare di tipo rituale, più che guidato da un chiaro obiettivo
- la lettura dell'espressione $-1(2n - 1)$ risulta ostacolata dalla mancata attivazione di frame utili per la sua interpretazione
- si ha una correzione di ipotesi di B2 "la differenza è sempre nella forma pari-dispari", ciò è supportato dalla scelta degli esempi
- nel riacordare l'espressione algebrica con esempi numerici si accorgono dell'imprecisione algebrica e si correggono
- buona interpretazione del contenuto informativo del risultato

Altri protocolli di gruppo

ES. n° 1

L

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

esempi

$$4 - 9 = -5$$

$$9 - 4 = 5$$

$$16 - 9 = 7$$

$$25 - 16 = 9$$

}

TUTTI I RISULTATI
SONO NUMERI DISPARI

DMOSTRAZIONE:

Se $p^2 - q^2 = 0$
($20 - 8 = 12$)


e $D^2 - P^2 = 0$
($18 - 8 = 10$)

}

TUTTI I RISULTATI
SONO NUMERI
DISPARI

DIMOSTRAZIONE 1

$$\begin{array}{lcl} 3^2 = 9 & & 5^2 = 25 \\ u^2 = 16 > 4 & & 6^2 = 36 > 11 \end{array}$$
$$\begin{array}{lcl} 2^2 = 4 & & 4^2 = 16 \\ 3^2 = 9 > 5 & & 5^2 = 25 > 9 \end{array}$$
$$\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 = a + b & & b = a - 1 \\ & & a = n \end{array}$$



Altri protocolli di gruppo

~~Algebra~~ $x^2 - (x-1)^2 = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x - 1 = 2x - 1$

esempi numerici

$$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

x e $x-1$

la differenza tra due quadrati consecutivi è uguale al ~~numero~~ numero (dispari) precedente del doppio di x (in \mathbb{N})

l'ipotesi è confermata dai precedenti esempi numerici e dall'espressione algebrica

(D)

① $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
 $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$
 $9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17$

$$\left. \begin{array}{l} h^2 - (h-1)^2 = h + (h-1) \\ m^2 - (m^2 - 2m + 1) = m + m - 1 \\ m^2 - \cancel{m^2} + 2m - 1 = 2m - 1 \\ 2m - 1 = 2m - 1 \end{array} \right\}$$

✓

(E)

La discussione collettiva relativa al problema in esame

Quanti hanno iniziato partendo con un esempio numerico? E quanti hanno utilizzato i numeri almeno una volta per confermare la propria congettura? Bene iniziamo: gruppo G, come avete condotto la vostra attività?

G1: a noi è venuto che la differenza dei quadrati è pari alla somma dei due numeri in partenza.

E1: anche a noi

A1: A noi è venuta una cosa diversa...

P: Benissimo, speravo si creassero almeno due schieramenti! Allora, G1 esponi quello che avete fatto.

G1: Cioè noi siamo partite dai numeri, abbiamo fatto 3 e 4, viene 7, poi anche con 5 e 6, 2 e 3...e ci veniva che era sempre la somma dei numeri che consideravamo, $3+4..$

P: Ok ragazzi, il gruppo G ha quindi congetturato, correggimi se sbaglio, che la differenza fra i quadrati fra due numeri consecutivi...continuate voi...

G2: è pari alla somma dei due numeri.

P: Allora, ora vediamo come l'avete dimostrato.

G2: Allora, noi abbiamo scritto i due numeri come a e b , poi abbiamo fatto $a^2 - b^2 = a+b$.

P: (scrivo alla lavagna) Dunque, qui abbiamo una scrittura algebrica, ragazzi voi cosa ne pensate?

A2: Che è sbagliata! La differenza di due quadrati è $(a-b)(a+b)$.

Soggetto che indaga, mi pongo come elemento del gruppo classe per poter invitare i gruppi a condividere le loro risoluzioni

La discussione collettiva relativa al problema in esame

Quanti hanno iniziato partendo con un esempio numerico? E quanti hanno utilizzato i numeri almeno una volta per confermare la propria congettura? Bene iniziamo: gruppo G, come avete condotto la vostra attività?

G1: a noi è venuto che la differenza dei quadrati è pari alla somma dei due numeri in partenza.

E1: anche a noi

A1: A noi è venuta una cosa diversa...

P: Benissimo, speravo si creassero almeno due schieramenti! Allora, G1 esponi quello che avete fatto.

G1: Cioè noi siamo partite dai numeri, abbiamo fatto 3 e 4, viene 7, poi anche con 5 e 6, 2 e 3...e ci veniva che era sempre la somma dei numeri che consideravamo, 3+4..

P: Ok ragazzi, il gruppo G ha quindi congetturato, correggimi se sbaglio, che la differenza fra i quadrati fra due numeri consecutivi...continuate voi...

G2: è pari alla somma dei due numeri.

P: Allora, ora vediamo come l'avete dimostrato.

G2: Allora, noi abbiamo scritto i due numeri come a e b, poi abbiamo fatto $a^2 - b^2 = a + b$.

P: (scrivo alla lavagna) Dunque, qui abbiamo una scrittura algebrica, ragazzi voi cosa ne pensate?

A2: Che è sbagliata! La differenza di due quadrati è $(a-b)(a+b)$.

Stimolo la riflessione su quanto hanno lavorato in modo che l'esposizione sia una rielaborazione del processo scritto condotto.

La discussione collettiva relativa al problema in esame

Quanti hanno iniziato partendo con un esempio numerico? E quanti hanno utilizzato i numeri almeno una volta per confermare la propria congettura? Bene iniziamo: gruppo G, come avete condotto la vostra attività?

G1: a noi è venuto che la differenza dei quadrati è pari alla somma dei due numeri in partenza.

E1: anche a noi

A1: A noi è venuta una cosa diversa...

P: Benissimo, speravo si creassero almeno due schieramenti! Allora, G1 esponi quello che avete fatto.

G1: Cioè noi siamo partite dai numeri, abbiamo fatto 3 e 4, viene 7, poi anche con 5 e 6, 2 e 3...e ci veniva che era sempre la somma dei numeri che consideravamo, 3+4..

P: Ok ragazzi, il gruppo G ha quindi congetturato, correggimi se sbaglio, che la differenza fra i quadrati fra due numeri consecutivi...continuate voi...

G2: è pari alla somma dei due numeri.

P: Allora, ora vediamo come l'avete dimostrato.

G2: Allora, noi abbiamo scritto i due numeri come a e b, poi abbiamo fatto $a^2 - b^2 = a + b$.

P: (scrivo alla lavagna) Dunque, qui abbiamo una scrittura algebrica, ragazzi voi cosa ne pensate?

A2: Che è sbagliata! La differenza di due quadrati è $(a-b)(a+b)$.

Tento di pormi come guida operativa e attivatore di pensieri anticipatori. Sarebbe comunque stato meglio chiedere di ri-esPLICITARE la congettura in autonomia

La discussione collettiva relativa al problema in esame

Quanti hanno iniziato partendo con un esempio numerico? E quanti hanno utilizzato i numeri almeno una volta per confermare la propria congettura? Bene iniziamo: gruppo G, come avete condotto la vostra attività?

G1: a noi è venuto che la differenza dei quadrati è pari alla somma dei due numeri in partenza.

E1: anche a noi

A1: A noi è venuta una cosa diversa...

P: Benissimo, speravo si creassero almeno due schieramenti! Allora, G1 esponi quello che avete fatto.

G1: Cioè noi siamo partite dai numeri, abbiamo fatto 3 e 4, viene 7, poi anche con 5 e 6, 2 e 3...e ci veniva che era sempre la somma dei numeri che consideravamo, 3+4..

P: Ok ragazzi, il gruppo G ha quindi congetturato, correggimi se sbaglio, che la differenza fra i quadrati fra due numeri consecutivi...continuate voi...

G2: è pari alla somma dei due numeri.

P: Allora, ora vediamo come l'avete dimostrato.

G2: Allora, noi abbiamo scritto i due numeri come a e b , poi abbiamo fatto $a^2 - b^2 = a + b$.

P: (scrivo alla lavagna) Dunque, qui abbiamo una scrittura algebrica, ragazzi voi cosa ne pensate?

A2: Che è sbagliata! La differenza di due quadrati è $(a-b)(a+b)$.

Sarebbe stato meglio prima chiedere di interpretare ciò il gruppo di G2 ha scritto (attivatore di processi interpretativi), poi di chiedere se questa può essere considerata una dimostrazione (attivatore di atteggiamenti riflessivi).

La discussione collettiva relativa al problema in esame

P: Gruppo E, anche voi avete congetturato la stessa tesi. Come l'avete dimostrata?

E1: Eh, noi abbiamo preso due numeri chiamandoli n e $n-1$, poi abbiamo fatto $n^2 - (n-1)^2 \dots$

P: (scrivo alla lavagna) e poi? Riusciamo a scrivere questa espressione in modo più facile da leggere?

E1: Sì perché poi sviluppi i calcoli e viene $2n-1$.

P: Ok, ma questo come giustifica la congettura di G2?

E2: eh, perché se fai $n+(n-1)$ ottieni $2n-1$.

B2: A noi veniva $-(2n-1)$

P: Ah, spiegami come avete fatto?

B2: Sì perché noi abbiamo inizialmente scritto come E1, solo che abbiamo visto l'espressione come differenza di due quadrati quindi $(n-n-1)(n+n-1)$, poi n ed n vanno via...

P: Ok, allora vi faccio questa domanda: avete osservato bene la vostra scrittura? Ragazzi, se vi chiedessi di dirmi se la quantità $-(2n-1)$ è positiva o negativa cosa mi rispondereste?

CORO: Negativa!!

P: Qualcuno sa dirmi il perché?

H2: Perché c'è il meno davanti!

P: Cerchiamo di essere rigorosi: c'è un meno davanti a una parentesi, e dentro la parentesi...

Soggetto che indaga

Attivatore di processi interpretativi e guida per il corretto equilibrio degli aspetti sintattici.

Avrei lasciato che il gruppo di E1 completasse l'esposizione della loro strategia dimostrativa. In questo modo ti saresti meglio posto come guida riflessiva.

Inoltre, non parlerei di "modo più facile da leggere" perché, in questo modo, si perde di vista il reale obiettivo, cioè mettere in luce che questa differenza di quadrati è uguale alla somma tra i due numeri iniziali.

In questo senso, non ti sei posto come attivatore di pensieri anticipatori.

La discussione collettiva relativa al problema in esame

P: Gruppo E, anche voi avete congetturato la stessa tesi. Come l'avete dimostrata?

E1: Eh, noi abbiamo preso due numeri chiamandoli n e $n-1$, poi abbiamo fatto $n^2 - (n-1)^2$...

P: (scrivo alla lavagna) e poi? Riusciamo a scrivere questa espressione in modo più facile da leggere?

E1: Sì perché noi sviluppi i calcoli e viene $2n-1$

P: Ok, ma questo come giustifica la congettura di G2?

E2: eh, perché se fai $n+(n-1)$ ottieni $2n-1$.

B2: A noi veniva $-(2n-1)$

P: Ah, spiegami come avete fatto?

B2: Sì perché noi abbiamo inizialmente scritto come E1, solo che abbiamo visto l'espressione come differenza di due quadrati quindi $(n-1)(n+1)$, poi n ed n vanno via...

P: Ok, allora vi faccio questa domanda: avete osservato bene la vostra scrittura? Ragazzi, se vi chiedessi di dirmi se la quantità $-(2n-1)$ è positiva o negativa cosa mi rispondereste?

CORO: Negativa!!

P: Qualcuno sa dirmi il perché?

H2: Perché c'è il meno davanti!

P: Cerchiamo di essere rigorosi: c'è un meno davanti a una parentesi, e dentro la parentesi...

Attivatore di processi interpretativi e guida riflessiva, perché invito il gruppo ad esplicitare la strategia attivata.

Avrei, però, dall'inizio, fatto esplicitare a tutti i gruppi l'obiettivo, in modo da far attivare i corretti pensieri anticipatori.

Soggetto che indaga

La discussione collettiva relativa al problema in esame

P: Gruppo E, anche voi avete congetturato la stessa tesi.
Come l'avete dimostrata?

E1: Eh, noi abbiamo preso due numeri chiamandoli n e $n-1$, poi abbiamo fatto
 $n^2 - (n-1)^2 \dots$

P: (scrivo alla lavagna) e poi? Riusciamo a scrivere questa espressione in modo più facile da leggere?

E1: Sì perché poi sviluppi i calcoli e viene $2n-1$.

P: Ok, ma questo come giustifica la congettura di G2?

E2: eh, perché se fai $n+(n-1)$ ottieni $2n-1$.

B2: A noi veniva $-(2n-1)$

P: Ah, spiegami come avete fatto?

B2: Sì perché noi abbiamo inizialmente scritto come E1, solo che abbiamo visto l'espressione come differenza di due quadrati quindi $(n-1)(n+1)$, poi n ed n vanno via...

P: Ok, allora vi faccio questa domanda: avete osservato bene la vostra scrittura? Ragazzi, se vi chiedessi di dirmi se la quantità $-(2n-1)$ è positiva o negativa cosa mi rispondereste?

CORO: Negativa!!

P: Qualcuno sa dirmi il perché?

H2: Perché c'è il meno davanti!

P: Cerchiamo di essere rigorosi: c'è un meno davanti a una parentesi, e dentro la parentesi...

Soggetto che indaga

La discussione collettiva relativa al problema in esame

C1: Noi pensiamo che sia sempre un numero dispari.

P: Ok, come lo avete dimostrato?

C1: Eh beh, abbiamo provato e visto che c'era sempre un numero pari e uno dispari, quindi la differenza doveva essere dispari.

[...]

D1: Ma alla fine è già stato detto, cioè facendo la differenza viene $2n-1$, e se n è un naturale allora quel numero è sicuramente dispari.

P: Ok, questo come vedete è già più convincente. E per la storia dei numeri consecutivi?

E2: Eh, noi abbiamo fatto un'equazione, da una parte la differenza dei quadrati e dall'altra $n+n-1$, e abbiamo visto che ci veniva.

P: Perché proprio $n+n-1$?

E1: Perché sono consecutivi, anzi sarebbe $n+(n-1)$, anche se poi le parentesi non servono.

P: E cosa intendete per "ci veniva"?

E1: che facendo i conti veniva la stessa cosa sia da una parte che dall'altra.

A1: Ma sì ma è la stessa cosa, tanto $n+(n-1)$ è uguale a $2n-1$.

P: Proprio uguale direi di no, io userei il termine equivalente. Secondo te in quale delle due scritture si vede bene che sto sommando due numeri consecutivi?

A1: Beh, nella prima

La congettura è stata formulata: "il risultato è sempre dispari". Manca solo il ricorso alla formalizzazione per dimostrare. La loro argomentazione verbale era una corretta dimostrazione perché fanno appello a tre teoremi:

- il quadrato di un numero pari è pari
- il quadrato di un numero dispari è dispari
- la differenza tra un numero pari ed un numero dispari è dispari

Sarebbe stato interessante chiedere di confrontare quanto osservato da B1

(la differenza è sempre il doppio del numero -1) e quanto osservato da

C1 (la differenza è sempre un dispari).

La discussione collettiva relativa al problema in esame

C1: Noi pensiamo che sia sempre un numero dispari.

P: Ok, come lo avete dimostrato?

C1: Eh beh, abbiamo provato e visto che c'era sempre un numero pari e uno dispari, quindi la differenza doveva essere dispari.

[...]

D1: Ma alla fine è già stato detto, cioè facendo la differenza viene $2n-1$, e se n è un naturale allora quel numero è sicuramente dispari.

P: Ok, questo come vedete è già più convincente. E per la storia dei numeri consecutivi?

E2: Eh, noi abbiamo fatto un'equazione, da una parte la differenza dei quadrati e dall'altra $n+n-1$, e abbiamo visto che ci veniva.

P: Perché proprio $n+n-1$?

E1: Perché sono consecutivi, anzi sarebbe $n+(n-1)$, anche se poi le parentesi non servono.

P: E cosa intendete per "ci veniva"?

E1: che facendo i conti veniva la stessa cosa sia da una parte che dall'altra.

A1: Ma sì ma è la stessa cosa, tanto $n+(n-1)$ è uguale a $2n-1$.

P: Proprio uguale direi di no, io userei il termine equivalente. Secondo te in quale delle due scritture si vede bene che sto sommando due numeri consecutivi?

A1: Beh, nella prima

Si cerca di attivare i processi interpretativi dal risultato algebrico per esplicitare il frame consecutivi

La discussione collettiva relativa al problema in esame

C1: Noi pensiamo che sia sempre un numero dispari.

P: Ok, come lo avete dimostrato?

C1: Eh beh, abbiamo provato e visto che c'era sempre un numero pari e uno dispari, quindi la differenza doveva essere dispari.

[...]

D1: Ma alla fine è già stato detto, cioè facendo la differenza viene $2n-1$, e se n è un naturale allora quel numero è sicuramente dispari.

P: Ok, questo come vedete è già più convincente. E per la storia dei numeri consecutivi?

E2: Eh, noi abbiamo fatto un'equazione, da una parte la differenza dei quadrati e dall'altra $n+n-1$, e abbiamo visto che ci veniva.

P: Perché proprio $n+n-1$?

E1: Perché sono consecutivi, anzi sarebbe $n+(n-1)$, anche se poi le parentesi non servono.

P: E cosa intendete per "ci veniva"?

E1: che facendo i conti veniva la stessa cosa sia da una parte che dall'altra.

A1: Ma sì ma è la stessa cosa, tanto $n+(n-1)$ è uguale a $2n-1$.

P: Proprio uguale direi di no, io userei il termine equivalente. Secondo te in quale delle due scritture si vede bene che sto sommando due numeri consecutivi?

A1: Beh, nella prima

Guida operativa. Vorrei far mostrare la potenza dell'approccio che hanno avuto

La discussione collettiva relativa al problema in esame

P: Mentre nell'altra...

D2: Eh, si vede che è un numero dispari

P: Benissimo, inoltre prima uno di voi ha proposto un'altra congettura, che si legge nuovamente bene in una delle espressioni

B2: Sì, il fatto che è il precedente del doppio del numero!

P: Esatto, quindi ragazzi vedete come in realtà avete lavorato tutti molto bene. Una scrittura, seppur semplice, può essere letta ed interpretata in modo diverso pur mantenendo l'equivalenza di fondo. Questo è importante. Adesso però dobbiamo rendere giustizia del primo intervento. Allora, questa scrittura $a^2 \cdot b^2 = a+b$? È sbagliata? È imprecisa? Come la possiamo giustificare?

H2: Ma la regola generale dice che $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)(a \cdot b)$

P: Ma i numeri che abbiamo scelto sono proprio generali o godono di una certa proprietà?

H2: Eh no, devono essere consecutivi.

P: Bene, quindi nella formula particolare congetturata da G1 perché sembra essere sparito $a \cdot b$?

H2: Ah, ma perché fa 1! È come se fosse $1 \cdot (a+b)$.

P: Esatto quindi, mettendo a posto bene le ipotesi su a e b , anche la scrittura proposta all'inizio è corretta.

Parte integrante del gruppo classe e attivatore di processi interpretativi

*Attivatore di processi interpretativi
Guida nel raccordo tra aspetto sintattico e semantico.*

Avrei invece insistito di più sul fatto che quella scrittura è una traduzione (migliorabile) della congettura e non una dimostrazione della congettura.

La discussione collettiva relativa al problema in esame

P: Mentre nell'altra...

D2: Eh, si vede che è un numero dispari

P: Benissimo, inoltre prima uno di voi ha proposto un'altra congettura, che si legge nuovamente bene in una delle espressioni

B2: Sì, il fatto che è il precedente del doppio del numero!

P: Esatto, quindi ragazzi vedete come in realtà avete lavorato tutti molto bene. Una scrittura, seppur semplice, può essere letta ed interpretata in modo diverso pur mantenendo l'equivalenza di fondo. Questo è importante. Adesso però dobbiamo rendere giustizia del

primo intervento. Allora, questa scrittura $a^2-b^2=a+b$? È sbagliata? È imprecisa? Come la possiamo giustificare?

H2: Ma la regola generale dice che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

P: Ma i numeri che abbiamo scelto sono proprio generali o godono di una certa proprietà?

H2: Eh no, devono essere consecutivi.

P: Bene, quindi nella formula particolare congetturata da G1 perché sembra essere sparito a-b?

H2: Ah, ma perché fa 1! È come se fosse $1 \cdot (a+b)$.

P: Esatto quindi, mettendo a posto bene le ipotesi su a e b, anche la scrittura proposta all'inizio è corretta.

Molto bene. Sei tornato su quella scrittura.

Io avrei però proposto prima una discussione sulle diverse strategie:

- Un gruppo imposta un'equazione (che rappresenta l'esplicitazione della congettura formulata) e mostra che si tratta di una identità;

- Un altro gruppo (quello che, se non sbaglio, formula la congettura dopo aver rappresentato la differenza dei due quadrati) costruisce l'espressione $(n+1)^2 - n^2$ e la trasforma fino a raggiungere la scrittura $2n-1$.

Si tratta di metodi diversi con obiettivi diversi.

Sembra mancare l'approccio di chi esplicita ipotesi e tesi e lavora sull'espressione $(n+1)^2 - n^2$ con un obiettivo (quello di raggiungere la scrittura $n+1+n$).

Avrei proposto anche questo approccio perché è quello associato maggiormente all'attivazione di pensieri anticipatori.

Riflessioni personali e sviluppi futuri

- I principali blocchi evidenziati paiono frutto di una diffusa abitudine ad un lavoro puramente sintattico
- Gli approcci efficaci alla dimostrazione della congettura prodotta sono quelli connessi ad una analisi mirata di esempi numerici e ad un chiaro riferimento agli obiettivi delle manipolazioni operate
- La metodologia adottata, non usuale per questi studenti, è risultata coinvolgente ed efficace poiché consente il confronto e l'esplicitazione dei processi di pensiero
- È necessario che attività di questo tipo non siano proposte sporadicamente, perché lo sviluppo di questa visione dell'algebra richiede tempi lunghi